ハミルトン系における繰り込み群と可積分性(基研研究会「統計物理の展望」,研究会報告)

山口, 義幸; 南部, 保貞

ハミルトン系における繰り込み群と可積分性

立命館大総研　山口義幸
名古屋大理　南部保貞

運動方程式を摂動的に解くとき、一般には共鳴が起こり永年項が現れる。この永年項のために摂動解はある時間より先では破れており、大域的な解を与えられない。永年項を取り除くために特異摂動法と総称される様々な方法が開発されて来た。例えば、平均化法、Multiple scale Expansions, Matched Asymptotic Expansions などが挙げられる。

近年、繰り込み群の方法と呼ばれる方法が提案された [1, 2]。この方法は上記の方法を統一した方法と言う意味で、もっとも強力な方法の一つである。繰り込み群の方法では、速い運動を無視して遅い運動を記述する簡略化した運動方程式 (繰り込み群方程式) を扱う事によって永年項の問題を処理し、大域的な解を得ている。しかし、簡略化された繰り込み群方程式が元の方程式の性質を反映しているかどうかは明らかではない。そこでハミルトン系に繰り込み群の方法を適用した場合に繰り込み群方程式がやはりハミルトン系になる条件を考察した。対象としたのは、カオスが生じる最小自由度の 2 自由度系である。結果は以下の通り。

Theorem 次のハミルトン系を考える。

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + \epsilon V(q_1, q_2) \tag{1}$$

ここで、ϵ は十分小さい数 ($|\epsilon| << 1$)、摂動項 $V(q_1, q_2)$ は 3 次もしくは 4 次の同時関数であるとする。摂動の 0 次解を

$$q_{j0} = B_j \cos t + C_j \sin t, \quad (j = 1, 2) \tag{2}$$

と書いて、B_j と C_j に対する繰り込み群方程式を立てる。この繰り込み群方程式が ϵ の second leading order までハミルトン系になるのは元の系 (1) が座標 (q_1, q_2) の回転によって変数分離可能なとき、またそのときに限る。

この定理の証明は、繰り込み群方程式を具体的に構成し、それがハミルトン系になる条件を、元の系が変数分離可能な条件と比較する事によりなされる。詳細は文献 [3] を参照のこと。定理についてコメントをいくつか述べておく。

コメント 1 ： $V(q_1, q_2)$ が 4 次の同時関数の場合には、繰り込み群方程式は一般には ϵ の全ての次数の項を持つ。従って、 second leading order とは $O(\epsilon^2)$ の項の事である。一方、3 次の同時関数の場合には、ϵ の偶数次数項しか持たない。よって、 $O(\epsilon^4)$ の項が second leading order となる。

コメント 2 ： 繰り込み群方程式は ϵ の first leading order まででは必ずハミルトン系になる。このとき、繰り込み群方程式のハミルトニアンは正準摂動論 [4, 5] で得られるハミルトニアンと同一になる。

コメント 3 ： 座標回転で変数分離可能ということは、系は本質的には 1 自由度系である。つまり、1 自由度系では second leading order までかならずハミルトン系になる。おそらく、任意の次数までハミルトン系になっていると予想している。

コメント４：繰り込み群方程式は、$B_1^2+C_1^2+B_2^2+C_2^2$ なる可積分部分に対応する保存量を持つ。したがって、ハミルトン系になるときには系は可積分となる。

この定理により、本質的に２自由度であることが効いてくる系の場合には、繰り込み群方程式がハミルトン系でなくなる事が分かった。従って、この原因や解の振舞を探る事によりカオスの情報が解析的に得られるのではないかと期待している。

将来における課題としては、摂動項の一般化 [6]、自由度の一般化、調和振動子である可積分部分の一般化などが挙げられる。

参考文献

[1] L.-Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono, "Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory", *Phys. Rev.* **E54** (1996) 376-94.

[2] T. Kunihiro, "A geometrical formulation of the renormalization group method for global analysis", *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 503-14.

[3] Y. Y. Yamaguchi and Y. Nambu, "Renormalization group equations and integrability in Hamiltonian systems", *Prog. Theor. Phys.* **100** (1998) No.1, To appear.

[4] G. Hori, "Theory of general perturbations with unspecified canonical variables", *Publ. Astron. Soc. Japan* **18** (1966) 287-96.

[5] A. Deprit, *Celestial Mech.* **1** (1969) 12-30.

[6] Y. Y. Yamaguchi and Y. Nambu, In preparation.